XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Старшая группа, высшая лига, 4 тур, решения и указания для жюри.

 Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

 Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *Пусть d1, d2, ..., dk (k > 1) — некоторые различные натуральные делители натурального числа n. Оказалось, что dk–dk–1 = dk–1–dk–2 = ... = d2–d1 и n = d1+d2+...+dk. При каких n это возможно?*

**Ответ**. При любом *n*, кратном шести. **Решение**. Пример: *n*/6+*n*/3+*n*/2 = *n*. Докажем, что подходящее число обязано делиться на шесть. Пусть среди данных нам делителей найдется два соседних не взаимно простых числа. Тогда на их общий простой делитель *p* делятся и все остальные данные делители (так как разности соседних чисел одинаковы) и мы можем сократить на *p* все делители *di* и *n*. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда любые два соседних делителя из этого ряда взаимно просты. Также не умаляя общности будем считать, что делители идут в порядке возрастания.

Так как *n* = *d*1+*d*2+...+*dk* < *kdk*, и при этом *dk* и *dk*–1 взаимно просты, то *n* делится на *dkdk*–1, откуда *k* > *dk*–1, что по принципу Дирихле влечет за собой *di* = *i* для всех 1  *i*  *k*–1. Если *k*  4, то число *n* уже делится и на 2 и на 3.

Случай *k* = 2 невозможен (из 1+*d*2 = *n* следует, что *d*2 делитель 1), а случай *k* = 3 возможен только если 1+2+*d*3 = *n*, откуда *d*3 = 3, и *n* кратно 6.

 Только ответ с примерами: *2 балла*. Только оценка: *6 баллов*.

**2.** *Дан выпуклый четырёхугольник ABCD, в котором DAB+ABC = 90; M — середина CD. Пусть AD = a, BC = b. Выразите через a и b значение SABMSDAMSBCM.*

**Ответ**. *ab*/2. **Решение**. Достроим треугольник *DBC* до параллелограмма *DBCK*. Тогда *DK* = *BC* = *b*. Поскольку *M* — середина его диагонали *CD*, то *M* — середина *KB*. Значит, *SABM* = *SAKM*. Далее, поскольку треугольники *BCM* и *KDM* равны, *SBCM* = *SKDM*. Кроме того, поскольку прямые *BC* и *KD* параллельны, то в силу условия *DAB*+*CBA* = 90, *ADK* = 90. Учитывая всё сказанное,  
*SABM*–*SDAM*–*SBCM* = *SAKM*–*SDAM*–*SKDM* = *SADK* = *ab*/2.

**3.** *У продавца есть неограниченный запас гирь весом 1, 2, 4, 8, ..., 1024 г. Он положил на правую чашу весов батон колбасы, и хочет класть на левую чашу или снимать с неё гири (по одной за ход). Он хочет выяснить, правда ли, что батон весит строго больше 682 г, но строго меньше 1365 г. Может ли он справиться за 11 ходов?*

**Ответ**. Может. **Решение**. За пять ходов он положит на левую чашу гири в 2, 8, 32, 128 и 512 г. Их суммарная масса 682 г, и продавец сравнит с ней массу батона. Затем он за шесть ходов положит на левую чашу гири в 1, 2, 8, 32, 128 и 512 г и получит на левой чаше 1365 г.

**4.** *На первый этап Олимпиады по закрытию скобочек пришло 2016 участников. Согласно новому Порядку, если на второй этап прошли a участников, на третий — b участников, а на четвертый — c участников, то ab должно равняться bc. Поскольку участник очередного этапа должен быть участником и предыдущего, a  b  c. Сколькими способами жюри олимпиады может выбрать участников этапов, согласно новому Порядку? Варианты счит*

*аются различными, если они отличаются составом участников хотя бы на одном этапе.*

**Ответ**.  **Решение**. Если перевести на язык множеств, то нам надо выбрать три вложенных друг в друга подмножества *C*  *B*  *A*  {1,2,3,...,2016}, в которых *a*, *b* и *c* элементов соответственно так, что *b*–*a* = *c*–*b*. Рассмотрим множество из 4032 элементов *x*1, *x*2, ..., *x*2016, *y*1, *y*2, ..., *y*2016 и какой-нибудь способ выбрать из него 2016 элементов. Сопоставим ему способ выбрать тройку подмножеств с заданным условием. Будем считать, что элемент *k* лежит в *C*, если *xk* выбрано, а *yk* нет; лежит в *B*, если выбрано *xk*; лежит в *A*, если выбрано *xk* или не выбрано *yk*. Легко видеть, что тогда *b*–*a* = *c*–*b*. Таким образом, построенное соответствие дает приведенный выше ответ.

 Ответ дан не в замкнутой форме (на показе объяснят, что это такое): *не выше 4 баллов*.

**5.** *При каких натуральных n выражение m33m (m — натуральное) даёт все возможные остатки при делении на n?*

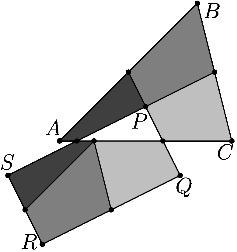
**Ответ**. *n* = 3 или *n* = 1. **Решение**. Заметим, что *m*33*m* при *m* = 1 и при *m* = 2 равно 2. Следовательно, при *m* = 1 и *m* = *n*–2 будут одинаковые остатки от деления на *n*. Это ничему не противоречит только если числа *n*–2 и 1 дают одинаковые остатки от деления на *n*, откуда *n* = 3 или *n* = 1. Легко проверить, что оба они подходят.

 Пропущен случай *n* = 1: *дыра в 4 балла*.

**6.** *Положительные числа a, b, c, d таковы, что abcd = 1. Докажите неравенство ab+bc+cd+da**.*

**Решение**. Поделив левую часть неравенства на *abcd*, получим , что является частным случаем транснеравенства.

**7.** *Дан остроугольный разносторонний треугольник. С помощью циркуля и линейки проведите две прямые, делящие данный треугольник на четыре части так, что из них можно сложить прямоугольник, и ни одна из прямых не параллельна стороне треугольника.*

**Решение**. Пусть дан треугольник *ABC*, причем *AB* > *AC* > *BC*. Пусть *K* и *L* — середины сторон *AB* и *BC* соответственно. Опустим из точки *K* перпендикуляр *KU* на *AC*. Тогда, *KU* < *BC*/2 < *AC*/2, кроме того, *AB*/2 > *AC*/2. Значит, на отрезке *AU* найдется такая точка *N*, что *KL* = *KN* = *AC*/2. Далее, поскольку *UC* > *KL*, на отрезке *NC* найдется такая точка *M*, что *NM* = *KL*. Значит, четырёхугольник *KLMN* — ромб. Разрежем треугольник по его диагоналям *KM* и *LN*, пересекающимся в точке *P*.

Отразим четырёхугольник *AKPN* центрально-симметрично относительно точки *N*, образ точки *P* при таком отображении обозначим через *S*, а образ точки *A* через *V*. Четырёхугольник *CLPM* отразим центрально симметрично относительно точки *M*, образ точки *P* при таком отображении обозначим через *Q*, а образ точки *C* через *V*1. Поскольку *AK*+*CM* = *MN* = *AB*/2, то *V* = *V*1. Достроим прямоугольный треугольник *SPQ* до прямоугольника *PQRS* (см. рис.). Несложно показать, что четырёхугольник, которого не хватало трём другим частям до этого прямоугольника, получается параллельным переносом четырёхугольника *PKBL* на вектор *BV*.

 Не обосновано существование использованного в решении ромба: *дыра в 4 балла*.

**8.** *В треугольнике ABC (AB < AC) биссектриса угла A пересекает BC в точке D, M — середина BC. Точка P — основание высоты из точки B на отрезок AD. Прямая BP пересекает отрезок AM в точке Q. Докажите, что DQ || AB.*

**Решение**. Пусть прямая *BP* пересекает *AC* в точке *K*. Тогда в треугольнике *ABK* биссектриса *AP* совпала с высотой, а значит и с медианой, откуда *P* — середина *BK*. Значит, *PM* — средняя линия треугольника *BKC*, и *PM* || *AC*. Пусть *PM* пересекает *AB* в точке *L*. Тогда *ML* — средняя линия треугольника *ABC*, а значит медиана треугольника *ABM*. Тогда чевианы *BQ* и *AD* пересекаются на медиане, а тогда, как известно, *DQ* || *AB*.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Старшая группа, первая лига, 4 тур, решения и указания для жюри.

 Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

 Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *Найдите все натуральные a и b, для которых a3+1 и b3+1 делятся на a2+b2.*

**Ответ**. *a* = *b* = 1. **Решение**. Вычитая, получаем: *a*3–*b*3 = (*a*–*b*)(*a*2+*ab*+*b*2) делится на *a*2+*b*2, откуда (*a*–*b*)*ab* делится на *a*2+*b*2. Из данных в условии делимостей сразу вытекает, что (*a*, *a*2+*b*2) = (*b*, *a*2+*b*2) = 1, следовательно, *a*–*b* делится на *a*2+*b*2. Это возможно только при *a* = *b* (иначе натуральное число |*a*–*b*| делилось бы на большее него число *a*2+*b*2). Итак, *a*3+1 делится на 2*a*2. Заметим, что число *a* не может делится ни на одно простое число *p*, следовательно, *a* = 1.

**2.** *Дан выпуклый четырёхугольник ABCD, в котором DAB+ABC = 90; M — середина CD. Пусть AD = a, BC = b. Выразите через a и b значение SABMSDAMSBCM.*

**Ответ**. *ab*/2. **Решение**. Достроим треугольник *DBC* до параллелограмма *DBCK*. Тогда *DK* = *BC* = *b*. Поскольку *M* — середина его диагонали *CD*, то *M* — середина *KB*. Значит, *SABM* = *SAKM*. Далее, поскольку треугольники *BCM* и *KDM* равны, *SBCM* = *SKDM*. Кроме того, поскольку прямые *BC* и *KD* параллельны, то в силу условия *DAB*+*CBA* = 90, *ADK* = 90. Учитывая всё сказанное,  
*SABM*–*SDAM*–*SBCM* = *SAKM*–*SDAM*–*SKDM* = *SADK* = *ab*/2.

**3.** *У продавца есть неограниченный запас гирь весом 1, 2, 4, 8, ..., 1024 г. Он положил на правую чашу весов батон колбасы, и хочет класть на левую чашу или снимать с неё гири (по одной за ход). Он хочет выяснить, правда ли, что батон весит строго больше 682 г, но строго меньше 1365 г. Может ли он справиться за 11 ходов?*

**Ответ**. Может. **Решение**. За пять ходов он положит на левую чашу гири в 2, 8, 32, 128 и 512 г. Их суммарная масса 682 г, и продавец сравнит с ней массу батона. Затем он за шесть ходов положит на левую чашу гири в 1, 2, 8, 32, 128 и 512 г и получит на левой чаше 1365 г.

**4.** *Дана клетчатая доска 3737. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 55 клеток и отметить все 5 клеток любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать дважды). Докажите, что после 90 Васиных ходов найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена.*

**Решение**. Пронумеруем столбцы и строки числами от 1 до 37. Закрасим клетки, у которых номер строки равен 6*k*+1, а номер столбца равен 3*m*+1. Нетрудно проверить, что таких клеток 91, и никакие две из них не могут оказаться отмеченными или соседями отмеченных клеток одной и той же главной диагонали квадрата 55, откуда и вытекает утверждение задачи.

**5.** *При каких натуральных n выражение m33m (m — натуральное) даёт все возможные остатки при делении на n?*

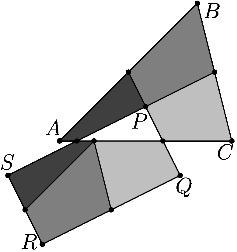
**Ответ**. *n* = 3 или *n* = 1. **Решение**. Заметим, что *m*33*m* при *m* = 1 и при *m* = 2 равно 2. Следовательно, при *m* = 1 и *m* = *n*–2 будут одинаковые остатки от деления на *n*. Это ничему не противоречит только если числа *n*–2 и 1 дают одинаковые остатки от деления на *n*, откуда *n* = 3 или *n* = 1. Легко проверить, что оба они подходят.

 Пропущен случай *n* = 1: *дыра в 4 балла*.

**6.** *Положительные числа a, b, c, d таковы, что abcd = 1. Докажите неравенство ab+bc+cd+da**.*

**Решение**. Поделив левую часть неравенства на *abcd*, получим , что является частным случаем транснеравенства.

**7.** *Дан остроугольный разносторонний треугольник. С помощью циркуля и линейки проведите две прямые, делящие данный треугольник на четыре части так, что из них можно сложить прямоугольник, и ни одна из прямых не параллельна стороне треугольника.*

**Решение**. Пусть дан треугольник *ABC*, причем *AB* > *AC* > *BC*. Пусть *K* и *L* — середины сторон *AB* и *BC* соответственно. Опустим из точки *K* перпендикуляр *KU* на *AC*. Тогда, *KU* < *BC*/2 < *AC*/2, кроме того, *AB*/2 > *AC*/2. Значит, на отрезке *AU* найдется такая точка *N*, что *KL* = *KN* = *AC*/2. Далее, поскольку *UC* > *KL*, на отрезке *NC* найдется такая точка *M*, что *NM* = *KL*. Значит, четырёхугольник *KLMN* — ромб. Разрежем треугольник по его диагоналям *KM* и *LN*, пересекающимся в точке *P*.

Отразим четырёхугольник *AKPN* центрально-симметрично относительно точки *N*, образ точки *P* при таком отображении обозначим через *S*, а образ точки *A* через *V*. Четырёхугольник *CLPM* отразим центрально симметрично относительно точки *M*, образ точки *P* при таком отображении обозначим через *Q*, а образ точки *C* через *V*1. Поскольку *AK*+*CM* = *MN* = *AB*/2, то *V* = *V*1. Достроим прямоугольный треугольник *SPQ* до прямоугольника *PQRS* (см. рис.). Несложно показать, что четырёхугольник, которого не хватало трём другим частям до этого прямоугольника, получается параллельным переносом четырёхугольника *PKBL* на вектор *BV*.

 Не обосновано существование использованного в решении ромба: *дыра в 4 балла*.

**8.** *В треугольнике ABC (AB < AC) биссектриса угла A пересекает BC в точке D, M — середина BC. Прямая, параллельная AB, проходящая через точку D, пересекает отрезок AM в точке Q. Докажите, что BQ перпендикулярно AD.*

**Решение**. Пусть *BQ* и *AD* пересекаются в точке *P*. Рассмотрим трапецию *BAQD*. В ней точка *M* — пересечение продолжений сторон, *P* — точка пересечения диагоналей. Значит, прямая *PM* проходит через середину отрезка *AB* — точку *L*. Тогда *ML* — средняя линия треугольника *ABC*. Пусть прямая *BP* пересекает *AC* в точке *K*. Тогда *BP* = *PK* и в треугольнике *ABK* биссектриса *AP* совпала с медианой, а, значит, и с высотой. Следовательно, *AD*  *BQ*, что и требовалось.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Старшая группа, вторая лига, 4 тур, решения и указания для жюри.

 Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

 Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *Найдите все натуральные a и b, для которых a3+1 и b3+1 делятся на a2+b2.*

**Ответ**. *a* = *b* = 1. **Решение**. Вычитая, получаем: *a*3–*b*3 = (*a*–*b*)(*a*2+*ab*+*b*2) делится на *a*2+*b*2, откуда (*a*–*b*)*ab* делится на *a*2+*b*2. Из данных в условии делимостей сразу вытекает, что (*a*, *a*2+*b*2) = (*b*, *a*2+*b*2) = 1, следовательно, *a*–*b* делится на *a*2+*b*2. Это возможно только при *a* = *b* (иначе натуральное число |*a*–*b*| делилось бы на большее него число *a*2+*b*2). Итак, *a*3+1 делится на 2*a*2. Заметим, что число *a* не может делится ни на одно простое число *p*, следовательно, *a* = 1.

**2.** *Дан выпуклый четырёхугольник ABCD, в котором DAB+ABC = 90; M — середина CD, AD = BC = 1. Найдите значение SABMSDAMSBCM.*

**Ответ**. 1/2. **Решение**. Достроим треугольник *DBC* до параллелограмма *DBCK*. Тогда *DK* = *BC* = 1. Поскольку *M* — середина его диагонали *CD*, то *M* — середина *KB*. Значит, *SABM* = *SAKM*. Далее, поскольку треугольники *BCM* и *KDM*, очевидно, равны, *SBCM* = *SKDM*. Кроме того, поскольку прямые *BC* и *KD* параллельны, то в силу условия *DAB*+*CBA* = 90, *ADK* = 90. Учитывая всё сказанное, *SABM*–*SDAM*–*SBCM* = *SAKM*–*SDAM*–*SKDM* = *SADK* = 1/2.

**3.** *У продавца есть неограниченный запас гирь весом 1, 2, 4, 8, ..., 1024 г. Он положил на правую чашу весов батон колбасы, и хочет класть на левую чашу или снимать с неё гири (по одной за ход). Он хочет выяснить, правда ли, что батон весит строго больше 682 г, но строго меньше 1365 г. Может ли он справиться за 11 ходов?*

**Ответ**. Может. **Решение**. За пять ходов он положит на левую чашу гири в 2, 8, 32, 128 и 512 г. Их суммарная масса 682 г, и продавец сравнит с ней массу батона. Затем он за шесть ходов положит на левую чашу гири в 1, 2, 8, 32, 128 и 512 г и получит на левой чаше 1365 г.

**4.** *Дана клетчатая доска 3737. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 55 клеток и отметить все 5 клеток любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать дважды). Докажите, что после 80 Васиных ходов найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена.*

**Решение**. Назовём *испорченной* клетку, которая либо сама отмечена, либо граничит по стороне с отмеченной. Легко проверить, что каждый ход портит не более 17 клеток. Осталось заметить, что 1780 = 1360 < 372 = 1369.

**5.** *При каких натуральных n выражение m23m+10 (m — натуральное) даёт все возможные остатки при делении на n?*

**Ответ**. *n* = 1. **Решение**. Заметим, что *m*23*m*+10 при *m* = 0 и при *m* = 3 равно 10. Следовательно, при *m* = *n* и *m* = 3 будут одинаковые остатки от деления на *n*. Это ничему не противоречит только если числа *n* и 3 дают одинаковые остатки от деления на *n*, откуда *n* = 3 или *n* = 1. Легко проверить, что подходит только *n* = 1.

 Доказано, что все *n*  2 не подходят, *n* = 1 потеряно: *8 баллов*.

**6.** *Положительные числа a, b, c, d таковы, что abcd = 1. Докажите неравенство ab+bc+cd+da**.*

**Решение**. Поделив левую часть неравенства на *abcd*, получим , что является частным случаем транснеравенства.

**7.** *На плоскости дана точка A. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) проводят через эту точку по одной прямой (все прямые должны быть различными). Проигрывает тот, после хода которого угол между какими-то двумя из проведённых прямых станет меньше 1. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?*

**Ответ**. Вася. **Решение**. Первым своим ходом Вася проводит прямую, перпендикулярную проведённой перед этим Петей прямой *l*, а потом проводит каждую свою прямую симметрично предыдущей Петиной относительной прямой *l*.

 Верная стратегия: *не менее 8 баллов*.

**8.** *В треугольнике ABC (AB < AC) биссектриса угла A пересекает BC в точке D, M — середина BC. Прямая, параллельная AB, проходящая через точку D, пересекает отрезок AM в точке Q. Докажите, что BQ перпендикулярно AD.*

**Решение**. Пусть *BQ* и *AD* пересекаются в точке *P*. Рассмотрим трапецию *BAQD*. В ней точка *M* — пересечение продолжений сторон, *P* — точка пересечения диагоналей. Значит, прямая *PM* проходит через середину отрезка *AB* — точку *L*. Тогда *ML* — средняя линия треугольника *ABC*. Пусть прямая *BP* пересекает *AC* в точке *K*. Тогда *BP* = *PK* и в треугольнике *ABK* биссектриса *AP* совпала с медианой, а, значит, и с высотой. Следовательно, *AD*  *BQ*, что и требовалось.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Младшая группа, высшая лига, 4 тур, бои за 1-4 места, решения и указания для жюри.

 Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

 Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *На плоскости дана точка A. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) проводят через эту точку различные прямые. Проигрывает тот, после хода которого угол между какими–то из проведённых прямых станет меньше 1. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?*

**Ответ**. Вася. **Решение**. Первым своим ходом Вася проводит прямую, перпендикулярную проведённой перед этим Петей прямой *l*, а потом проводит каждую свою прямую симметрично предыдущей Петиной относительной прямой *l*.

 Верная стратегия без обоснования: *6 баллов*.

**2.** *Натуральные числа m, n и простое число p удовлетворяют условиям: m2+n2 = p и m3+n3+4 делится на p. Найдите m и n.*

**Ответ**. *m* = *n* = 1, *p* = 2; *m* = 3, *n* = 2, *p* = 13; *m* = 2, *n* = 3, *p* = 13. **Решение**. Заметим, что (*m*+*n*)(*m*2+*n*2) = *m*3+*n*3+*mn*(*m*+*n*) кратно *p*, откуда следует, что *mn*(*m*+*n*)  4 (mod *p*). Следовательно, (*m*+*n*)3 = (*m*+*n*)(*m*2+*n*2)+2*mn*(*m*+*n*)  8 (mod *p*). Тогда (*m*+*n*)3–8 = (*m*+*n*–2)((*m*+*n*)2+2(*m*+*n*)+4) кратно *p*, а, значит, одна из скобок делится на *p*.

Предположим, что *m*+*n*–2 делится на *p*. Тогда либо *m* = *n* = 1 (в этом случае *p* = 2 — это решение), либо *m*+*n*  *p*+2, откуда следует *m*2+*n*2  (*m*+*n*)2/2 > *p*2/2 > *p*, что невозможно.

Остается случай, когда *p* > 2 делит ((*m*+*n*)2+2(*m*+*n*)+4) = *m*2+*n*2+2(*mn*+*m*+*n*+2), а, следовательно, и *mn*+*m*+*n*+2. При *p* > 2 хотя бы одно из чисел *m* и *n* больше 1, поэтому *mn*  2 и *mn*+*m*+*n*+2 < 4*mn*  2(*m*2+*n*2) = 2*p*. Следовательно, *mn*+*m*+*n*+2 = *p* = *m*2+*n*2.

Предположим, что *m* = 1. Тогда *n*2+1 = 2*n*+3, что невозможно.

Пусть *m* 2 и *n* 2. Тогда *m*+*n*+2 = *m*2+*n*2–*mn*  *mn*, откуда следует (*m*–1)(*n*–1)  3. Так как числа *m* и *n* — разной четности, остается разобрать случаи *m* = 3, *n* = 2 и *m* = 2, *n* = 3. Это дает нам *p* = 13. Остается убедиться в том, что 23+33+4 = 39 делится на *p*.

 Доказано только, что (*m*+*n*)3  8 (mod *p*): *2 балла*. Доказано, что *mn*+*m*+*n*+2 делится на *p*, дальнейшего продвижения нет: *4 балла*. При верной логике решения не разобран случай, когда одно из чисел равно 1: *дыра в 4 балла*.

**3.** *Дана клетчатая доска 3737. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 55 клеток и отметить все 5 клеток любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать дважды). Докажите, что после 90 Васиных ходов найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена.*

**Решение**. Пронумеруем столбцы и строки числами от 1 до 37. Закрасим клетки, у которых номер строки равен 6*k*+1, а номер столбца равен 3*m*+1. Нетрудно проверить, что таких клеток 91, и никакие две из них не могут оказаться отмеченными или соседями отмеченных клеток одной и той же главной диагонали квадрата 55, откуда и вытекает утверждение задачи.

**4.** *В стране города соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого города можно выехать не более, чем по 7 дорогам. Докажите, что эту страну можно так разбить на 11 республик, что ни в одной республике нет города, из которого выходят две дороги в города этой республики.*

**Решение**. Пусть города — вершины ориентированного графа, а дороги — его ребра. Республики будут цветами вершин графа. Нужно покрасить вершины графа в 11 цветов так, чтобы не было вершины, из которой выходят рёбра в две вершины того же цвета. Проведём индукцию по количеству вершин. База очевидна. Докажем переход. Так как из каждой вершины выходит не более 7 ребер, есть вершина *a*, в которую входит не более 7 рёбер. Удалим *a* и покрасим оставшийся граф. Предположим, что после покраски *a* в цвет *i* условие нарушилось, то есть появилась тройка таких вершин *x*, *y*, *z* цвета *i*, что из *x* выходят рёбра в *y* и *z*. Понятно, что одна из этих вершин совпадает с *a*.

Если *x* = *a*, то из *a* выходят два ребра в вершины цвета *i*, таких цветов не более [7/2] = 3. Пусть *a* = *y* или *a* = *z*. Тогда ребро из вершины *x* цвета *i* входит в *a*. Таких рёбер не более 7, а значит, и цветов не более 7. Всего получается не более 10 запретов. Так как у нас 11 цветов, мы сможем покрасить вершину *a*.

**5.** *При каких натуральных n среди чисел вида k3–3k, где k произвольное целое число, встречаются числа, дающие всевозможные остатки при делении на n?*

**Ответ**. *n* = 3 или *n* = 1. **Решение**. Заметим, что *k*33*k* при *k* = 1 и при *k* = 2 равно 2. Следовательно, при *k* = 1 и *k* = *n*–2 будут одинаковые остатки от деления на *n*. Это ничему не противоречит только если числа *n*–2 и 1 дают одинаковые остатки от деления на *n*, откуда *n* = 3 или *n* = 1. Легко проверить, что оба они подходят.

**6.** *Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно три из этих кнопок действующие. За одну попытку разрешается одновременно нажать любые три кнопки. Если хотя бы одна из нажимаемых кнопок действующая, то лампочка загорается. Как при помощи не более 9 проверок выяснить, какие кнопки являются действующими?*

**Решение**. Первые три попытки: 123, 456, 789. Если хотя бы раз лампочка не загорелась, мы нашли три недействующие кнопки. Пусть это 123. Возьмём 1 и 2 и испытаем с ними кнопки 4-9. Если лампочка загорелась трижды, мы нашли все действующие кнопки, если дважды мы нашли две действующие кнопки, а третья кнопка 10. Если лампочка загорелась трижды, действующие кнопки расположены по одной в тройках 123, 456, 789, а кнопка 10 недействующая. Осталось показать, как за два испытания выявить действующую кнопку среди трёх. Испытаем тройки 1,2,10 и 1,10,3. Если оба раза лампочка загорится действующая кнопка 1, если один раз не загорится действующая та, которую мы при этом испытании заменили кнопкой 10.

**7.** *Неотрицательные числа x и y удовлетворяют соотношению xy+x+y = 1. Докажите неравенство x2y2+x+y  5xy.*

**Решение**. *x*2*y*2+*x*+*y*  5*xy* (1*xy*)2+1*xy*  5*xy* 22*x*2*y*+*x*2+*y*2  4*xy*  *x*2+*y*2  2*xy*.

**8.** *В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок AL. Из точки P на сторону AB опущена высота PQ. На стороне AB выбрана такая точка R, что RQ = AC/4. Докажите, что AB+BC  4PR.*

**Решение**. Опустим из *P* перпендикуляр *PS* на прямую *AC*. Отложим отрезок *ST* = *RQ* на *AC* (не важно, в какую сторону). По свойству биссектрисы мы имеем *PS* = *PQ*. Треугольники *PQR* и *PST* равны по признаку равенства прямоугольных треугольников, откуда *PR* = *PT*. Остается доказать, что *AB*+*BC*  4*PT*.

Продлим перпендикуляр *BP* до пересечения с прямой *AC* в точке *E*. В треугольнике *ABE* отрезок *AP* — высота и биссектриса, а значит и медиана. Проведем среднюю линию *A*1*C*1 треугольника *ABC*. Она делит пополам любой отрезок, соединяющий *B* *c* точкой на стороне *AC*. Поэтому *P* лежит на прямой *A*1*C*1.

Пусть *M* — середина *AC*. Восставим перпендикуляр *MB'* к прямой *AC*, длина которого равна высоте *BH* треугольника *ABC*, в сторону точки *B*. Средняя линия *A*1*C*1 делит *B'M* пополам и параллельна *AC*, поэтому *B'M* = 2*PS*. Кроме того, *AM* = *MC* = 2*ST*, поэтому *B'C* = *B'A* = 2*PT*.

Отметим на продолжении отрезка *AB'* за *B'* точку *C*2 так, что *С*2*B'* = *AB'*. Пусть *l* — это прямая, проходящая через *B'* параллельно *AC*. Тогда *B* лежит на *l*, а точки *C*2 и *C* симметричны относительно прямой *l*. Поэтому *C*2*B* = *BC*. Следовательно, *AB*+*BC* = *AB*+*BC*2  *AC*2 = *AB'*+*B'C*2 = 4*PT* = 4*RS*, что и требовалось доказать.

 Только первый абзац нашего решения: *2 балла*. Доказано, что точка *P* лежит на средней линии, параллельной *AC*: *2 балла* (суммируются с предыдущими).

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Младшая группа, 4 тур. Высшая лига, бои за 5-8 места; первая лига, бои за 1-6 места.

# Решения и указания для жюри.

 Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

 Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *На плоскости дана точка A. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) проводят через эту точку по одной прямой (все прямые должны быть различными). Проигрывает тот, после хода которого угол между какими-то двумя из проведённых прямых станет меньше 1. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?*

**Ответ**. Вася. **Решение**. Первым своим ходом Вася проводит прямую, перпендикулярную проведённой перед этим Петей прямой *l*, а потом проводит каждую свою прямую симметрично предыдущей Петиной относительной прямой *l*.

 Верная стратегия без обоснования: *6 баллов*.

**2.** *Петя написал в ряд в каком-то порядке все нечётные числа, меньшие 2016. Вася под каждыми двумя соседними Петиными числами написал их произведение, получив ряд из 1007 чисел. Докажите, что среди Васиных чисел можно найти 3 стоящих подряд, любые два из которых имеют общий делитель, больший единицы.*

**Решение**. Среди Петиных чисел ровно треть делится на 3. Значит, либо среди чисел, делящихся на 3, найдутся два числа *a* и *b*, между которыми записано не более одного числа, либо найдутся хотя бы две пары соседних чисел, делящихся на 3, между которыми ровно по два числа. В первом случае среди Васиных чисел найдутся три стоящих подряд, делящихся на 3. Во втором возьмём делящиеся на 3 числа *a* и *b*, между которыми стоят два числа *c* и *d*, не равные 1. Тогда получаем произведения *ac*, *cd* и *db*, где первое с третьим имеют общий делитель 3, первое со вторым общий делитель *c*, второе с третьим общий делитель *d*.

 Потерян случай, когда одно из четырёх чисел равно 1: *дыра в 6 баллов*.

**3.** *Дана клетчатая доска 2525. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 33 клеток и отметить все три клетки любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать дважды). Докажите, что после 60 Васиных ходов найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена.*

**Решение**. Пронумеруем столбцы и строки числами от 1 до 25. Закрасим клетки, у которых номер строки равен 4*k*+1, а номер столбца равен 3*m*+1. Нетрудно проверить, что таких клеток 63, и никакие две из них не могут оказаться отмеченными или соседями отмеченных клеток одной и той же главной диагонали квадрата 33, откуда и вытекает утверждение задачи.

**4.** *В стране города соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого города можно выехать не более, чем по 7 дорогам. Докажите, что эту страну можно так разбить на 11 республик, что ни в одной республике нет города, из которого выходят две дороги в города этой республики.*

**Решение**. Пусть города — вершины ориентированного графа, а дороги — его ребра. Республики будут цветами вершин графа. Нужно покрасить вершины графа в 11 цветов так, чтобы не было вершины, из которой выходят рёбра в две вершины того же цвета. Проведём индукцию по количеству вершин. База очевидна. Докажем переход. Так как из каждой вершины выходит не более 7 ребер, есть вершина *a*, в которую входит не более 7 рёбер. Удалим *a* и покрасим оставшийся граф. Предположим, что после покраски *a* в цвет *i* условие нарушилось, то есть появилась тройка таких вершин *x*, *y*, *z* цвета *i*, что из *x* выходят рёбра в *y* и *z*. Понятно, что одна из этих вершин совпадает с *a*.

Если *x* = *a*, то из *a* выходят два ребра в вершины цвета *i*, таких цветов не более [7/2] = 3. Пусть *a* = *y* или *a* = *z*. Тогда ребро из вершины *x* цвета *i* входит в *a*. Таких рёбер не более 7, а значит, и цветов не более 7. Всего получается не более 10 запретов. Так как у нас 11 цветов, мы сможем покрасить вершину *a*.

**5.** *При каких натуральных n среди чисел вида k3–3k, где k произвольное целое число, встречаются числа, дающие всевозможные остатки при делении на n?*

**Ответ**. *n* = 3 или *n* = 1. **Решение**. Заметим, что *k*33*k* при *k* = 1 и при *k* = 2 равно 2. Следовательно, при *k* = 1 и *k* = *n*–2 будут одинаковые остатки от деления на *n*. Это ничему не противоречит только если числа *n*–2 и 1 дают одинаковые остатки от деления на *n*, откуда *n* = 3 или *n* = 1. Легко проверить, что оба они подходят.

**6.** *Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно три из этих кнопок действующие. За одну попытку разрешается одновременно нажать любые три кнопки. Если хотя бы одна из нажимаемых кнопок действующая, то лампочка загорается. Как при помощи не более 9 проверок выяснить, какие кнопки являются действующими?*

**Решение**. Первые три попытки: 123, 456, 789. Если хотя бы раз лампочка не загорелась, мы нашли три недействующие кнопки. Пусть это 123. Возьмём 1 и 2 и испытаем с ними кнопки 4-9. Если лампочка загорелась трижды, мы нашли все действующие кнопки, если дважды мы нашли две действующие кнопки, а третья кнопка 10. Если лампочка загорелась трижды, действующие кнопки расположены по одной в тройках 123, 456, 789, а кнопка 10 недействующая. Осталось показать, как за два испытания выявить действующую кнопку среди трёх. Испытаем тройки 1,2,10 и 1,10,3. Если оба раза лампочка загорится действующая кнопка 1, если один раз не загорится действующая та, которую мы при этом испытании заменили кнопкой 10.

**7.** *Неотрицательные числа x и y удовлетворяют соотношению xy+x+y = 1. Докажите неравенство x2y2+1  6xy.*

**Решение**. *x*2*y*2+1  6*xy*  (1*xy*)2+1*xy*  5*xy* 22*x*2*y*+*x*2+*y*2  4*xy*  *x*2+*y*2  2*xy*.

**8.** *Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Точка K — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на отрезок AC. На стороне AC выбрана такая точка L, что KL = AC/4. Докажите, что AB+BC  4LM.*

**Решение**. Пусть *N* — середина *AC*. Восставим в сторону точки *B* перпендикуляр *B'N* к прямой *AC*, длина которого равна высоте *BH* треугольника *ABC*. Из подобия треугольников *CMK* и *CB'N* имеем 2*MK* = *BH* = *B'N*. Кроме того, *AN* = *NC* = 2*KL*, поэтому *B'C* = *B'A* = 2*ML*.

Отметим на продолжении отрезка *AB'* за *B'* точку *C*1 так, что *C*1*B'* = *AB'*. Пусть *l* — это прямая, проходящая через *B'* параллельно *AC*. Тогда *B* лежит на *l*, а точки *C*1 и *C* симметричны относительно прямой *l*. Поэтому *C*1*B* = *BC*. Следовательно, *AB*+*BC* = *AB*+*BC*1  *AC*1 = *AB'*+*B'C*1 = 4*ML*, что и требовалось доказать.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Младшая группа, 4 тур. Первая лига, бой за7-8 места, вторая лига.

# Решения и указания для жюри.

 Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

 Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *На плоскости дана точка A. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) проводят через эту точку по одной прямой (все прямые должны быть различными). Проигрывает тот, после хода которого угол между какими-то двумя из проведённых прямых станет меньше 1. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?*

**Ответ**. Вася. **Решение**. Первым своим ходом Вася проводит прямую, перпендикулярную проведённой перед этим Петей прямой *l*, а потом проводит каждую свою прямую симметрично предыдущей Петиной относительной прямой *l*.

 Верная стратегия: *не менее 8 баллов*.

**2.** *Петя написал в ряд в каком-то порядке все нечётные числа, меньшие 2016. Вася под каждыми двумя соседними Петиными числами написал их произведение, получив ряд из 1007 чисел. Докажите, что среди Васиных чисел можно найти 3 стоящих подряд, любые два из которых имеют общий делитель, больший единицы.*

**Решение**. Среди Петиных чисел ровно треть делится на 3. Значит, либо среди чисел, делящихся на 3, найдутся два числа *a* и *b*, между которыми записано не более одного числа, либо найдутся хотя бы две пары соседних чисел, делящихся на 3, между которыми ровно по два числа. В первом случае среди Васиных чисел найдутся три стоящих подряд, делящихся на 3. Во втором возьмём делящиеся на 3 числа *a* и *b*, между которыми стоят два числа *c* и *d*, не равные 1. Тогда получаем произведения *ac*, *cd* и *db*, где первое с третьим имеют общий делитель 3, первое со вторым общий делитель *c*, второе с третьим общий делитель *d*.

 Потерян случай, когда одно из четырёх чисел равно 1: *дыра в 6 баллов*.

**3.** *Дана клетчатая доска 2525. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 33 клеток и отметить все три клетки любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать дважды). Докажите, что после 60 Васиных ходов найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена.*

**Решение**. Пронумеруем столбцы и строки числами от 1 до 25. Закрасим клетки, у которых номер строки равен 4*k*+1, а номер столбца равен 3*m*+1. Нетрудно проверить, что таких клеток 63, и никакие две из них не могут оказаться отмеченными или соседями отмеченных клеток одной и той же главной диагонали квадрата 33, откуда и вытекает утверждение задачи.

**4.** *Найдите количество троек натуральных чисел (a, b, c) таких, что a < b < c < 2016 и ab = bc.*

**Ответ**. 10072 = 1014049. **Решение**. Очевидно, количество таких троек равно количеству пар *a* < *c*, где *ac* чётно, то есть количеству пар натуральных чисел одной чётности, меньших 2016. Нечётных чисел там 1008, чётных 1007, так что искомое количество равно 10081007/2+10071006/2 = 10072.

**5.** *В каждой клетке таблицы nn записано число. Оказалось, что для всех k сумма чисел, стоящих в k-ом столбце, отличается от суммы чисел, стоящих в k-й строке, ровно на 1. При каких n такое возможно?*

**Ответ**. При всех чётных *n*. **Решение**. Если *n* нечётно, то в описанной таблице сумма всех чисел, подсчитанная по строкам, и она же, подсчитанная по столбцам, отличались бы на нечётное число. В таблице же с чётным *n* достаточно заполнить единицами верхнюю половину диагонали таблицы, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, а остальные клетки заполнить нулями.

 Решение в нечетном случае годится только для целых чисел: *2 балла*. Только пример для чётного случая или оценка для нечётного случая: *4 балла*.

**6.** *Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно три из этих кнопок действующие. За одну попытку разрешается одновременно нажать любые три кнопки. Если хотя бы одна из нажимаемых кнопок действующая, то лампочка загорается. Как при помощи не более 9 проверок выяснить, какие кнопки являются действующими?*

**Решение**. Первые три попытки: 123, 456, 789. Если хотя бы раз лампочка не загорелась, мы нашли три недействующие кнопки. Пусть это 123. Возьмём 1 и 2 и испытаем с ними кнопки 4-9. Если лампочка загорелась трижды, мы нашли все действующие кнопки, если дважды мы нашли две действующие кнопки, а третья кнопка 10. Если лампочка загорелась трижды, действующие кнопки расположены по одной в тройках 123, 456, 789, а кнопка 10 недействующая. Осталось показать, как за два испытания выявить действующую кнопку среди трёх. Испытаем тройки 1,2,10 и 1,10,3. Если оба раза лампочка загорится действующая кнопка 1, если один раз не загорится действующая та, которую мы при этом испытании заменили кнопкой 10.

**7.** *Неотрицательные числа x и y удовлетворяют соотношению xy+x+y = 1. Докажите неравенство x2y2+x+y  3xy.*

**Решение**. *x*2*y*2+*x*+*y*  3*xy* (1*xy*)2+1*xy* 3*xy* 22*x*2*y*+*x*2+*y*2  2*xy*  *x*2+*y*2  0.

**8.** *В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. На отрезке HC отмечена такая точка N, что HN = AC/2. Докажите, что AB+BC  2BN.*

**Решение**. Пусть *M* — середина *AC*. Восставим в сторону точки *B* перпендикуляр *B'M* к прямой *AC*, длина которого равна высоте *BH* треугольника *ABC*. Отметим на продолжении отрезка *AB'* за *B'* точку *C*1 так, что *C*1*B'* = *AB'*. Пусть *l* — это прямая, проходящая через *B'* параллельно *AC*. Тогда *B* лежит на *l*, а точки *C*1 и *C* симметричны относительно прямой *l*. Поэтому *AB'* = *CB'* = *BN* и *C*1*B* = *BC*. Следовательно, *AB*+*BC* = *AB*+*BC*1  *AC*1 = *AB'*+*C*1*B'* = 2*BN*, что и требовалось доказать.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Младшая группа, третья лига, 4 тур, решения и указания для жюри.

 Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

 Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *Можно ли при помощи только скобок сделать равенство 1:2:3:4:5:6:7:8:9:10 = 2016 верным?*

**Ответ**. Нет. **Решение**. Двойка входит в разложение числа 2015 в пятой степени, а степень двойки в левой части при любой расстановке скобок будет чётной.

**2.** *Петя написал в ряд в каком-то порядке все нечётные числа, меньшие 2016. Вася под каждыми двумя соседними Петиными числами написал их произведение, получив ряд из 1007 чисел. Докажите, что среди Васиных чисел можно найти 3 стоящих подряд, любые два из которых имеют общий делитель, больший единицы.*

**Решение**. Среди Петиных чисел ровно треть делится на 3. Значит, либо среди чисел, делящихся на 3, найдутся два числа *a* и *b*, между которыми записано не более одного числа, либо найдутся хотя бы две пары соседних чисел, делящихся на 3, между которыми ровно по два числа. В первом случае среди Васиных чисел найдутся три стоящих подряд, делящихся на 3. Во втором возьмём делящиеся на 3 числа *a* и *b*, между которыми стоят два числа *c* и *d*, не равные 1. Тогда получаем произведения *ac*, *cd* и *db*, где первое с третьим имеют общий делитель 3, первое со вторым общий делитель *c*, второе с третьим общий делитель *d*.

 Потерян случай, когда одно из четырёх чисел равно 1: *дыра в 6 баллов*.

**3.** *В каждой клетке таблицы nn записано число. Для всех k сумма чисел k-го столбца отличается от суммы чисел k-й строки ровно на 1. При каких n такое возможно?*

**Ответ**. При всех чётных *n*. **Решение**. Если *n* нечётно, то в описанной таблице сумма всех чисел, подсчитанная по строкам, и она же, подсчитанная по столбцам, отличались бы на нечётное число. В таблице же с чётным *n* достаточно заполнить единицами верхнюю половину диагонали таблицы, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, а остальные клетки заполнить нулями.

 Решение в нечетном случае годится только для целых чисел: *2 балла*. Только пример для чётного случая или оценка для нечётного случая: *4 балла*.

**4.** *Найдите количество троек натуральных чисел (a, b, c), таких, что a < b < c < 2016 и a–b = b–c.*

**Ответ**. 10072 = 1014049. **Решение**. Очевидно, количество таких троек равно количеству пар *a* < *c*, где *ac* чётно, то есть количеству пар натуральных чисел одной чётности, меньших 2016. Нечётных чисел там 1008, чётных 1007, так что искомое количество равно 10081007/2+10071006/2 = 10072.

**5.** *Квадрат 99 замощён прямоугольниками 13. Докажите, что какой–то квадрат 33 внутри данного квадрата замощён тремя такими прямоугольниками.*

**Решение**. Рассмотрим прямоугольник в углу квадрата; квадрат расположим так, чтобы этот прямоугольник располагался горизонтально в правом нижнем углу. Если над ним в двух следующих строках ещё два горизонтальных мы победили. Иначе имеем один или два горизонтальных прямоугольника и примыкающий к ним и границе квадрата вертикальный прямоугольник. Если справа от него в двух следующих столбцах вертикальные прямоугольники мы победили. Иначе справа от одного или двух вертикальных, примыкая к верхней клетке одного из них, расположен горизонтальный прямоугольник. Продолжая процесс, мы придём к противоречию, когда очередная плитка получающегося «паркета» не уместится в пределах квадрата.

**6.** *Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно три из этих кнопок действующие. За одну попытку разрешается одновременно нажать любые три кнопки. Если хотя бы одна из нажимаемых кнопок действующая, то лампочка загорается. Как при помощи не более 9 проверок выяснить, какие кнопки являются действующими?*

**Решение**. Первые три попытки: 123, 456, 789. Если хотя бы раз лампочка не загорелась, мы нашли три недействующие кнопки. Пусть это 123. Возьмём 1 и 2 и испытаем с ними кнопки 4-9. Если лампочка загорелась трижды, мы нашли все действующие кнопки, если дважды мы нашли две действующие кнопки, а третья кнопка 10. Если лампочка загорелась трижды, действующие кнопки расположены по одной в тройках 123, 456, 789, а кнопка 10 недействующая. Осталось показать, как за два испытания выявить действующую кнопку среди трёх. Испытаем тройки 1,2,10 и 1,10,3. Если оба раза лампочка загорится действующая кнопка 1, если один раз не загорится действующая та, которую мы при этом испытании заменили кнопкой 10.

**7.** *Число 124 представили в виде суммы натуральных чисел (не обязательно различных), произведение которых также равно 124. Каким может быть количество этих натуральных чисел?*

**Ответ**. 62, 91, 92. **Решение**. Сомножители, не равные 1, должны давать в произведении 124. На такие сомножители число 124 можно разложить тремя способами: 622, 314, 3122, дающими три приведённых выше ответа.

 Потеря одного из разложений: *не более 6 баллов*. Только один пример: *2 балла*. Ошибки при подсчете числа слагаемых при верном ходе решения: *дыра в 2 балла*.

**8.** *В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. На отрезке HC отмечена такая точка N, что HN = AC/2. Докажите, что AB+BC  2BN.*

**Решение**. Пусть *M* — середина *AC*. Восставим в сторону точки *B* перпендикуляр *B'M* к прямой *AC*, длина которого равна высоте *BH* треугольника *ABC*. Отметим на продолжении отрезка *AB'* за *B'* точку *C*1 так, что *C*1*B'* = *AB'*. Пусть *l* — это прямая, проходящая через *B'* параллельно *AC*. Тогда *B* лежит на *l*, а точки *C*1 и *C* симметричны относительно прямой *l*. Поэтому *AB'* = *CB'* = *BN* и *C*1*B* = *BC*. Следовательно, *AB*+*BC* = *AB*+*BC*1  *AC*1 = *AB'*+*C*1*B'* = 2*BN*, что и требовалось доказать.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Группа «Старт», 4 тур. Высшая лига, бои за 1-4 места. Решения и указания для жюри.

 Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

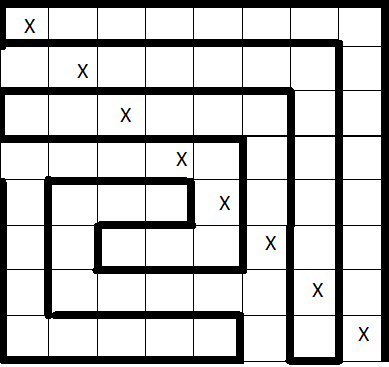
**1.** *На плоскости дана точка A. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) проводят через эту точку по одной прямой (все прямые должны быть различными). Проигрывает тот, после хода которого угол между какими-то двумя из проведённых прямых станет меньше 1. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?*

**Ответ**. Вася. **Решение**. Первым своим ходом Вася проводит прямую, перпендикулярную проведённой перед этим Петей прямой *l*, а потом проводит каждую свою прямую симметрично предыдущей Петиной относительной прямой *l*.

 Верная стратегия: *не менее 8 баллов*.

**2.** *Петя написал в ряд в каком-то порядке все нечётные числа, меньшие 2016. Вася под каждыми двумя соседними Петиными числами написал их произведение, получив ряд из 1007 чисел. Докажите, что среди Васиных чисел можно найти 3 стоящих подряд, любые два из которых имеют общий делитель, больший единицы.*

**Решение**. Среди Петиных чисел ровно треть делится на 3. Значит, либо среди чисел, делящихся на 3, найдутся два числа *a* и *b*, между которыми записано не более одного числа, либо найдутся хотя бы две пары соседних чисел, делящихся на 3, между которыми ровно по два числа. В первом случае среди Васиных чисел найдутся три стоящих подряд, делящихся на 3. Во втором возьмём делящиеся на 3 числа *a* и *b*, между которыми стоят два числа *c* и *d*, не равные 1. Тогда получаем произведения *ac*, *cd* и *db*, где первое с третьим имеют общий делитель 3, первое со вторым общий делитель *c*, второе с третьим общий делитель *d*.

**3.** *Можно ли в квадрате 88 провести ломаную, проходящую по границам клеток (включая край), которая проходит ровно по одному разу по всем узлам (включая граничные) и делит квадрат на 4 части, в каждой из которых находится ровно по 2 клетки диагонали, соединяющей левый нижний угол с правым верхним?*

**Ответ**. Можно. **Решение**. См. рисунок.

**4.** *Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно три из этих кнопок действующие. За одну попытку разрешается одновременно нажать любые три кнопки. Если хотя бы одна из нажимаемых кнопок действующая, то лампочка загорается. Как при помощи не более 9 проверок выяснить, какие кнопки являются действующими? (При каждой проверке можно пользоваться результатами всех предыдущих.)*

**Решение**. Первые три попытки: 123, 456, 789. Если хотя бы раз лампочка не загорелась, мы нашли три недействующие кнопки. Пусть это 123. Возьмём 1 и 2 и испытаем с ними кнопки 4-9. Если лампочка загорелась трижды, мы нашли все действующие кнопки, если дважды мы нашли две действующие кнопки, а третья кнопка 10. Если лампочка загорелась трижды, действующие кнопки расположены по одной в тройках 123, 456, 789, а кнопка 10 недействующая. Осталось показать, как за два испытания выявить действующую кнопку среди трёх. Испытаем тройки 1,2,10 и 1,10,3. Если оба раза лампочка загорится действующая кнопка 1, если один раз не загорится действующая та, которую мы при этом испытании заменили кнопкой 10.

**5.** *При каких натуральных n > 1 среди чисел, представимых в виде a7+5a6, где a натуральное, найдутся числа, дающие все возможные остатки от деления на n?*

**Ответ**. *n* = 5. **Решение**. Заметим, что *a*7+5*a*6 = *a*6(*a*+5) дает при делении на *n* остаток 0 как при *a* = *n*, так и при *a* = *n*5. Это ничему не противоречит только если числа *n* и *n*5 дают одинаковые остатки от деления на *n*, откуда *n* = 5. Легко проверить, что оно подходит.

**6.** *Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел a и b, не делящихся на 10, что 2ab =**, где*  *означает число, полученное приписыванием числа b сзади к числу a.* *Числа a и b не могут начинаться с 0.*

**Решение**. 2*ab* =  2*ab* = 10*na*+*b* 10*na* = *b*(2*a*1), где число *b* *n*-значное. Последнему равенству удовлетворяют, например, числа *a* = (5*n*+1)/2 и *b* = 2*na*.

**7.** *На турнир приехало n > 5 спортсменов. Оказалось, что среди любых пяти из них найдётся тот, кто знает остальных четверых. При каких n можно наверняка утверждать, что кто-то из спортсменов знает всех остальных?*

**Ответ**. При нечётных *n*. **Решение**. Покажем, что каждый спортсмен незнаком не более чем с одним другим спортсменом. Пусть есть спортсмен *A*, незнакомый с *B* и *C*. Тогда любые двое, не совпадающие с *A*, *B* и *C*, должны дружить между собой, иначе в пятёрке из *A*, *B*, *C* и этих двоих не найдётся знающего остальных четверых. Кроме того, очевидно, что у каждого из *A*, *B* и *C* не более трёх незнакомых. Поэтому найдётся спортсмен, знакомый с *A*, *B* и *C*, а, значит, и со всем спортсменами на турнире.

Заметим теперь, что при нечётном *n* не может случиться, что каждый незнаком ровно с одним из остальных: тогда в графе незнакомств было бы нечётное число нечётных вершин. Значит, здесь найдётся спортсмен, знакомый со всем остальными. При чётном же *n* есть пример, когда никто не знаком со всеми остальными: разбиваем спортсменов на пары, и объявляем, что спортсмены в каждой паре незнакомы, а все прочие знакомы. Условие задачи при этом выполнено, так как среди любых пятерых найдётся такой, чей незнакомец не входит в пятёрку.

 Только нечетный случай: *4 балла*. Только четный случай: *2 балла*.

**8.** *Дана клетчатая доска 3737. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 66 клеток и отметить все 6 клеток любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать дважды). Докажите, что после 90 Васиных ходов найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена.*

**Решение**. Пронумеруем столбцы и строки числами от 1 до 37. Закрасим клетки, у которых номер строки равен 6*k*+1, а номер столбца равен 3*m*+1. Нетрудно проверить, что таких клеток 91, и никакие две из них не могут оказаться отмеченными или соседями отмеченных клеток одной и той же главной диагонали квадрата 55, откуда и вытекает утверждение задачи.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Группа «Старт», 4 тур. Высшая лига, бои за 5-8 места; первая лига.

# Решения и указания для жюри.

 Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

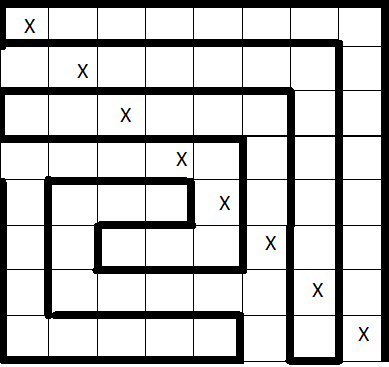
**1.** *На плоскости дана точка A. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) проводят через эту точку по одной прямой (все прямые должны быть различными). Проигрывает тот, после хода которого угол между какими-то двумя из проведённых прямых станет меньше 1. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?*

**Ответ**. Вася. **Решение**. Первым своим ходом Вася проводит прямую, перпендикулярную проведённой перед этим Петей прямой *l*, а потом проводит каждую свою прямую симметрично предыдущей Петиной относительной прямой *l*.

 Верная стратегия: *не менее 8 баллов*.

**2.** *Петя написал в ряд в каком-то порядке все нечётные числа, меньшие 2016. Вася под каждыми двумя соседними Петиными числами написал их произведение, получив ряд из 1007 чисел. Докажите, что среди Васиных чисел можно найти 3 стоящих подряд, любые два из которых имеют общий делитель, больший единицы.*

**Решение**. Среди Петиных чисел ровно треть делится на 3. Значит, либо среди чисел, делящихся на 3, найдутся два числа *a* и *b*, между которыми записано не более одного числа, либо найдутся хотя бы две пары соседних чисел, делящихся на 3, между которыми ровно по два числа. В первом случае среди Васиных чисел найдутся три стоящих подряд, делящихся на 3. Во втором возьмём делящиеся на 3 числа *a* и *b*, между которыми стоят два числа *c* и *d*, не равные 1. Тогда получаем произведения *ac*, *cd* и *db*, где первое с третьим имеют общий делитель 3, первое со вторым общий делитель *c*, второе с третьим общий делитель *d*.

**3.** *Можно ли в квадрате 88 провести ломаную, проходящую по границам клеток (включая край), которая проходит ровно по одному разу по всем узлам (включая граничные) и делит квадрат на 4 части, в каждой из которых находится ровно по 2 клетки диагонали, соединяющей левый нижний угол с правым верхним?*

**Ответ**. Можно. **Решение**. См. рисунок.

**4.** *Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно три из этих кнопок действующие. За одну попытку разрешается одновременно нажать любые три кнопки. Если хотя бы одна из нажимаемых кнопок действующая, то лампочка загорается. Как при помощи не более 9 проверок выяснить, какие кнопки являются действующими? (При каждой проверке можно пользоваться результатами всех предыдущих.)*

**Решение**. Первые три попытки: 123, 456, 789. Если хотя бы раз лампочка не загорелась, мы нашли три недействующие кнопки. Пусть это 123. Возьмём 1 и 2 и испытаем с ними кнопки 4-9. Если лампочка загорелась трижды, мы нашли все действующие кнопки, если дважды мы нашли две действующие кнопки, а третья кнопка 10. Если лампочка загорелась трижды, действующие кнопки расположены по одной в тройках 123, 456, 789, а кнопка 10 недействующая. Осталось показать, как за два испытания выявить действующую кнопку среди трёх. Испытаем тройки 1,2,10 и 1,10,3. Если оба раза лампочка загорится действующая кнопка 1, если один раз не загорится действующая та, которую мы при этом испытании заменили кнопкой 10.

**5.** *При каких натуральных n > 1 среди чисел, представимых в виде a2+3a, где a натуральное, найдутся числа, дающие все возможные остатки от деления на n?*

**Ответ**. Ни при каких. **Решение**. Заметим, что *a*2+3*a* = *a*(*a*+3) дает при делении на *n* остаток 0 как при *a* = *n*, так и при *a* = *n*3. Это ничему не противоречит только если числа *n* и *n*3 дают одинаковые остатки от деления на *n*, откуда *n* = 3. Но легко проверить, что *n* = 3 не подходит.

**6.** *Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел a и b, что 2ab =**, где*  *означает число, полученное приписыванием числа b сзади к числу a.* *Числа a и b не могут начинаться с 0.*

**Решение**. Один пример: 236 = 36. Другие примеры получаются из этого умножением *b* на степени десятки.

**7.** *На турнир приехало 47 спортсменов. Оказалось, что среди любых пяти из них найдётся тот, кто знает остальных четверых. Можно ли наверняка утверждать, что кто-то из спортсменов знает всех остальных?*

**Ответ**. Можно. **Решение**. Пусть есть спортсмен *A*, незнакомый хотя бы с двумя спортсменами *B* и *C*. Тогда любые двое, не совпадающие с *A*, *B* и *C*, должны дружить между собой, иначе в пятёрке из *A*, *B*, *C* и этих двоих не найдётся знающего остальных четверых. Кроме того, очевидно, что у каждого из *A*, *B* и *C* не более трёх незнакомых. Поэтому найдётся спортсмен, знакомый с *A*, *B* и *C*, а, значит, и со всем спортсменами на турнире.

Значит, если нет спортсмена, знакомого со всеми остальными, то каждый незнаком ровно с одним участником турнира. Но тогда «незнакомств» должно быть 47/2, что невозможно.

**8.** *Дана клетчатая доска 3737. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 55 клеток и отметить все 5 клеток любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать дважды). Докажите, что после 80 Васиных ходов найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена.*

**Решение**. Назовём *испорченной* клетку, которая либо сама отмечена, либо граничит по стороне с отмеченной. Легко проверить, что каждый ход портит не более 17 клеток. Осталось заметить, что 1780 = 1360 < 372 = 1369.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Группа «Старт», вторая лига, 4 тур, решения и указания для жюри.

 Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

**1.** *На плоскости дана точка A. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) проводят через эту точку по одной прямой (все прямые должны быть различными). Проигрывает тот, после хода которого угол между какими-то двумя из проведённых прямых станет меньше 1. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?*

**Ответ**. Вася. **Решение**. Первым своим ходом Вася проводит прямую, перпендикулярную проведённой перед этим Петей прямой *l*, а потом проводит каждую свою прямую симметрично предыдущей Петиной относительной прямой *l*.

 Верная стратегия: *не менее 8 баллов*.

**2.** *Петя написал в ряд в каком-то порядке все нечётные числа, меньшие 2016. Вася под каждыми двумя соседними Петиными числами написал их произведение, получив ряд из 1007 чисел. Докажите, что среди Васиных чисел можно найти 3 стоящих подряд, любые два из которых имеют общий делитель, больший единицы.*

**Решение**. Среди Петиных чисел ровно треть делится на 3. Значит, либо среди чисел, делящихся на 3, найдутся два числа *a* и *b*, между которыми записано не более одного числа, либо найдутся хотя бы две пары соседних чисел, делящихся на 3, между которыми ровно по два числа. В первом случае среди Васиных чисел найдутся три стоящих подряд, делящихся на 3. Во втором возьмём делящиеся на 3 числа *a* и *b*, между которыми стоят два числа *c* и *d*, не равные 1. Тогда получаем произведения *ac*, *cd* и *db*, где первое с третьим имеют общий делитель 3, первое со вторым общий делитель *c*, второе с третьим общий делитель *d*.

**3.** *Квадрат 9×9 замощён прямоугольниками 1×3. Докажите, что какой-то квадрат 3×3 внутри данного квадрата замощён тремя такими прямоугольниками.*

**Решение**. Рассмотрим прямоугольник в углу квадрата; квадрат расположим так, чтобы этот прямоугольник располагался горизонтально в правом нижнем углу. Если над ним в двух следующих строках ещё два горизонтальных мы победили. Иначе имеем один или два горизонтальных прямоугольника и примыкающий к ним и границе квадрата вертикальный прямоугольник. Если справа от него в двух следующих столбцах вертикальные прямоугольники мы победили. Иначе справа от одного или двух вертикальных, примыкая к верхней клетке одного из них, расположен горизонтальный прямоугольник. Продолжая процесс, мы придём к противоречию, когда очередная плитка получающегося «паркета» не уместится в пределах квадрата.

**4.** *Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно три из этих кнопок действующие. За одну попытку разрешается одновременно нажать любые три кнопки. Если хотя бы одна из нажимаемых кнопок действующая, то лампочка загорается. Как при помощи 9 проверок выяснить, какие кнопки являются действующими?*

**Решение**. Первые три попытки: 123, 456, 789. Если хотя бы раз лампочка не загорелась, мы нашли три недействующие кнопки. Пусть это 123. Возьмём 1 и 2 и испытаем с ними кнопки 4-9. Если лампочка загорелась трижды, мы нашли все действующие кнопки, если дважды мы нашли две действующие кнопки, а третья кнопка 10. Если лампочка загорелась трижды, действующие кнопки расположены по одной в тройках 123, 456, 789, а кнопка 10 недействующая. Осталось показать, как за два испытания выявить действующую кнопку среди трёх. Испытаем тройки 1,2,10 и 1,10,3. Если оба раза лампочка загорится действующая кнопка 1, если один раз не загорится действующая та, которую мы при этом испытании заменили кнопкой 10.

**5.** *Имеется таблица NN, в каждой клетке которой записано число. Для всех i cумма чисел i-го столбца отличается от суммы чисел i-й строки ровно на 1. Для каких N такое возможно?*

**Ответ**. При всех чётных *N*. **Решение**. Если *N* нечётно, то в описанной таблице сумма всех чисел, подсчитанная по строкам, и она же, подсчитанная по столбцам, отличались бы на нечётное число. В таблице же с чётным *N* достаточно заполнить единицами верхнюю половину диагонали таблицы, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, а остальные клетки заполнить нулями.

 Только чётный или только нечётный случай: *4 балла*. Решение годится только для целых чисел: *6 баллов*.

**6.** *Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел a и b, что 2ab =**, где*  *означает число, полученное приписыванием числа b сзади к числу a.* *Числа a и b не могут начинаться с 0.*

**Решение**. Один пример: 236 = 36. Другие примеры получаются из этого умножением *b* на степени десятки.

**7.** *Число 20 представили в виде суммы натуральных чисел (не обязательно различных), произведение которых также равно 20. Каким может быть количество этих натуральных чисел?*

**Ответ**. 10, 13 или 14. **Решение**. Сомножители, не равные 1, должны давать в произведении 20. На такие сомножители число 20 можно разложить тремя способами: 102, 54, 522, дающими три приведённых выше ответа.

 Потеря одного из разложений: *не более 6 баллов*. Только один пример: *2 балла*. Ошибки при подсчете числа слагаемых при верном ходе решения: *дыра в 2 балла*.

**8.** *Можно ли при помощи только скобок сделать равенство 1:2:3:4:5:6:7:8 = 2016:5 верным?*

**Ответ**. Да. **Решение**. 1:((2:3):4)):(((5:6):7):8) = 2016:5.